

时滞小波神经网络的全局指数稳定性分析(II)

肖胜中^{1,2}, 张新政¹

(1. 广东工业大学 自动化学院, 广东 广州 510090; 2. 广东农工商学院, 广东 广州 510507)

摘要: 利用 BROUWER 不动点原理证明了时滞小波神经网络的平衡点的存在性, 利用压缩映象原理证明了平衡点的唯一性, 利用 HALANAY 时滞微分不等式和双对角占优矩阵的理论, 讨论了时滞小波神经网络的全局指数稳定性, 并得出了几个重要的结论.

关键词: 小波; 神经网络; 时滞; 全局指数稳定

中图分类号: O175; TP183

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2005)03-0029-05

引言

时滞小波神经网络的理论与应用是目前国际上神经网络研究领域的前沿课题之一, 时滞不仅反映了人工神经网络中放大器的开关速度等硬件现实, 也是为了更好地模拟生物神经网络的时延特性, 同时也是解决某些实际问题的需要, 它的一个重要应用就是求解最优化问题, 此时最基本的要求是网络全局稳定, 更为理想的是全局指数稳定, 因此对时滞小波神经网络的全局指数稳定性分析是非常重要的问题.

本文考虑的时滞小波神经网络(DWNN), 由时滞微分方程(1)描述:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -u_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(u_j(t-\tau)) + I_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

其中 f_i 是连续可微的 Meyer 小波, 其正则性指数为 $0 < \alpha < 1$, 即满足

$$|f_i(x)| \leq (1+|x|)^{-\alpha} \leq 1,$$

$\tau > 0$ 是第 i 个神经元与第 j 个神经元之间的信号传输时滞.

对于式(1), 有的用 Lyapunov 泛涵, 研究了其平衡点的渐近稳定性, 见文献[1~3], 亦有研究了其平衡点全局指数稳定性, 见文献[4, 5], 而本文研究平衡点的全局指数稳定性时, 利用的是 HALANAY 时滞微分不等式.

1 定义与引理

设 $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)^T$ 是网络的平衡点, 即有 $-u_i^* + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(u_j^*) + I_i = 0, i=1, 2, \dots, n$. 设 $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ 为向量的 P 范数, 给定矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 相应的矩阵 P 范数为 $\|A\|_p$. 设与网络(1)有关的初始条件为 $u_i(s) = \phi_i(s), s \in [-\tau, 0], \phi_i: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界

收稿日期: 2004-04-06

基金项目: 国家自然科学基金资助(60274030); 广东省科技攻关项目(C31801)

作者简介: 肖胜中(1965-), 男, 副教授, 主要研究方向为小波分析、神经网络和微分方程的稳定性分析.

函数.

定义 1 如果网络(1)只有一个平衡点 u^* , 而且 u^* 是全局指数稳定的, 即存在常数 $\lambda > 0$, $M \geq 1$, 使得

$$\|u(t) - u^*\|_p \leq M \sup_{\tau \leq s \leq t} \|\phi(s) - u^*\|_p e^{-\lambda(t-s)}, \quad \forall t \geq 0,$$

那么称网络是全局指数稳定的.

引理 1 网络(1)的平衡点集非空.

证明 设点 u^* 是网络(1)的一个平衡点, 那么点 u^* 一定满足:

$$u^* = F(u^*) = Af(u^*) + I, \quad (2)$$

其中

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, f(u^*) = (f_1(u_1^*), f_2(u_2^*), \dots, f_n(u_n^*))^T, I = (I_1, I_2, \dots, I_n)^T,$$

可见平衡点 u^* 实际上是 F 的不动点. 下面利用 Brouwer 不动点原理证明.

事实上, 由

$$|F_i(x)| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j) + I_i \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |f_j(x_j)| + |I_i| < \sum_{j=1}^n |a_{ij}| M + |I_i|,$$

这里 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, M 是把 f 局限在某一个闭凸集上时的上确界, 即 $M = \max_{1 \leq i \leq n} \sup |f_i(x)|$,

为了讨论的方便, 令 $K = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| M + |I_i|$, 易见 F 的值域

$$F(R^n) \subset \Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid \|x_i\| \leq K, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

由于 F 是连续的, 如果把 F 限制在 Ω 上, 那么 F 把 Ω 映成自身, 于是根据 Brouwer 不动点原理, F 至少有一个不动点, 记为 u^* . Brouwer 不动点原理不保证唯一性, 但是, 如果再附加其他的一些条件, 就能保证平衡点的唯一性. 为了证明全局指数稳定性, 再引进如下两个引理.

引理 2^[6] 设常数 $a > b > 0$, 函数 $x(t)$ 是在 $[t_0 - \tau, t]$ 上定义的非负的一元连续函数, 且在此区间上有如下的不等式成立:

$$D^+ x(t) \leq -ax(t) + b\bar{x}(t), \quad (3)$$

其中 $\bar{x}(t) = \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \{x(s)\}$, $\tau \geq 0$ 为常数, 则在 $t \geq t_0$ 上有

$$x(t) \leq \bar{x}(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad (4)$$

其中 λ 为下面超越方程(5)的唯一正根.

$$x = a - be^{x\tau}. \quad (5)$$

引理 3^[7] 设 $C = (c_{ij})_{n \times n}$, $D = (d_{ij})_{n \times n}$ 为实方阵, $x(t)$ 是微分不等式 $\dot{x}(t) \leq Cx(t) + D\bar{x}(t)$ 的解, 其中 $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t))^T$, $\bar{x}_i(t) = \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \{x_i(s)\}$, 如果 $c_{ij} \geq 0$, $d_{ij} \geq 0$, 且 $-(C+D)$ 是 M 矩阵, 则存在常数 $\lambda > 0$, $k \geq \bar{x}(0)$, 使

$$x(t) \leq ke^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

2 全局指数稳定性分析

定理 1 如果 $\|A\|_p < 1$, 则

1) 网络(1)有唯一的平衡点 u^* .

2) 平衡点 u^* 是指数稳定的, 且有指数衰减估计.

$$\|u(t) - u^*\|_p \leq \sup_{\tau \leq s \leq t} \|\phi(s) - u^*\|_p e^{-\lambda(t-s)}, \quad t \geq 0.$$

其中 λ 是超越方程 $\lambda = 1 - \|A\| e^{-\lambda \tau}$ 的唯一正根.

证明 由引理 1 知,网络(1)至少有一个平衡点 u^* , 设 $y^* \neq u^*$ 是另一个平衡点,则:

$$y^* - u^* = A[f(y^*) - f(u^*)],$$

进一步,有

$$\|y^* - u^*\|_p \leq \|A\|_p \|f(y^*) - f(u^*)\|_p \leq \|A\|_p (1 + \|\xi\|)^{-\alpha} \|y^* - u^*\|_p \leq \|y^* - u^*\|_p,$$

矛盾,因此 $y^* = u^*$.

设 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$, $y_i(t) = u_i(t) - u_i^*$,

则有

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f'_j(\theta_j(t)) y_j(t - \tau), \quad (6)$$

其中 $\theta_j(t)$ 介于 $u_j(t - \tau)$ 与 u_j^* 之间,记 $G(t) = \text{diag}(f'_1(\theta_1(t)), f'_2(\theta_2(t)), \dots, f'_n(\theta_n(t)))$, $y(t - \tau) = (y_1(t - \tau), y_2(t - \tau), \dots, y_n(t - \tau))^T$, 则式(6)可以改写为矩阵方程,其形式为

$$\frac{dy}{dt} = -y(t) + AG(t)y(t - \tau), \quad (7)$$

因为 $y(t)$ 关于 $t \geq 0$ 右可导,则由极限与无穷小的关系,式(7)等价于

$$\frac{[y(t + \delta) - y(t)]}{\delta} = -y(t) + AG(t)y(t - \tau) + o(\delta), \quad (8)$$

这时 $\delta > 0$, 且 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} o(\delta) = 0$, 由(8)且注意到 $\|G(t)\|_p \leq 1$, 可推出

$$\|y(t + \delta)\|_p \leq (1 - \delta) \|y(t)\|_p + \delta \|A\|_p \|y(t - \tau)\|_p + o(\delta),$$

进一步

$$\|y(t + \delta)\|_p - \|y(t)\|_p / \delta \leq -\|y(t)\|_p + \|A\|_p \|y(t - \tau)\|_p + o(\delta).$$

上式两边令 $\delta \rightarrow 0^+$ 得右 DINI 导数

$$d^+ \|y(t)\|_p / dt \leq -\|y(t)\|_p + \|A\|_p \|y(t - \tau)\|_p, \quad (9)$$

令

$$x(t) = \begin{cases} \|y(t) - u^*\|_p, & -\tau \leq t \leq 0, \\ \|y(t)\|_p, & t > 0, \end{cases}$$

则由式(9)可以导出

$$\dot{x}(t) \leq -x(t) + \|A\|_p \bar{x}(t), \quad t \geq 0,$$

这里 $\bar{x}(t) = \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \{x(s)\}$.

当 $\|A\|_p < 1$ 时,根据引理 2 有

$$\|u(t) - u^*\|_p \leq \sup_{t-\tau \leq s \leq 0} \|y(s) - u^*\|_p e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

其中 λ 是超越方程 $\lambda = 1 - \|A\|_p e^{-\lambda \tau}$ 的唯一正根,定理 1 得证.

推论 1 当 $\|A\|_p < 1$, 无时滞网络(1)是全局指数稳定的,收敛指数为 $\lambda = 1 - \|A\|_p$.

定理 2 设 $|A| = (|a_{ij}|)_{n \times n}$, I 为单位矩阵, $W = I - |A| \in DD_0(\alpha) \cap K^{m \times m}$ ($w_{ii} > 0$) 是不可约矩阵,如果 $G(W) \neq \emptyset$, 那么网络(1)是全局指数稳定的. 其中 $DD_0(\alpha)$, $K^{m \times m}$, $G(W)$ 见文献 [8].

证明 首先证明平衡点的唯一性.

设 $u^*, \bar{u}^*$ 都是网络(1)的平衡点,则有 $\bar{u}_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(\bar{u}_j^*) + I_i$, 于是

$$|\bar{u}_i^* - u_i^*| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |f_j(\bar{u}_j^*) - f_j(u_j^*)| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| (1 + |\xi|)^{-\alpha} |\bar{u}_j^* - u_j^*| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |\bar{u}_j^* - u_j^*|,$$

其中 ξ 介于 $\bar{u}_j^*$ 与 u_j^* 之间.

令

$$|\bar{u}^* - u^*| = (|\bar{u}_1^* - u_1^*|, |\bar{u}_2^* - u_2^*|, \dots, |\bar{u}_n^* - u_n^*|)^T,$$

则有 $|\bar{u}^* - u^*| \leq A \|\bar{u}^* - u^*\| \leq \dots \leq A^m |\bar{u}^* - u^*|$.

注意到 W 是一个 M 矩阵^[8], 从而谱半径 $\rho(|A|) < 1$, 于是 $\lim_{m \rightarrow \infty} |A|^m = 0$, 故有 $|\bar{u}^* - u^*| = 0$, 也就是说网络(1)的平衡点是唯一的.

下证全局指数稳定性.

设 u^* 是网络(1)的平衡点,则由式(1)有

$$\frac{d(u_i - u_i^*)}{dt} = (u_i - u_i^*) + \sum_{j=1}^n a_{ij} [f_j(u_j(t - \tau)) - f_j(u_j^*)],$$

上式两边同乘以 $\text{sgn}(u_i - u_i^*)$ 得,放大不等式

$$\frac{d|u_i - u_i^*|}{dt} \leq -|u_i - u_i^*| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |(u_j(t - \tau) - u_j^*)|,$$

令

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, x_i(t) = \begin{cases} |u_i - u_i^*| & t > 0, \\ |u_i(s) - u_i^*| & -\tau \leq t \leq 0, \end{cases}$$

则有

$$\dot{x}(t) \leq -x(t) + |A| \bar{x}(t), \quad t \geq 0, \quad (10)$$

其中

$$\bar{x}(t) = [\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)]^T, \quad \bar{x}_i(t) = \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \{x_i(s)\}.$$

由于 W 是一个 M 矩阵,则对式(10)应用引理 2,知存在常向量 $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)^T, k_i \geq \bar{x}_i(0)$, 正数 $\lambda > 0$, 使 $x_i(t) \leq k_i e^{-\lambda t}$.

令 $M_i = \frac{k_i}{\bar{x}_i(0)}$, 则有 $x_i(t) \leq M_i \bar{x}_i(0) e^{-\lambda t}$, 从而

$$\|x(t)\|_{\infty} \leq M \sup_{-\tau \leq t \leq 0} \|x(t)\|_{\infty} e^{-\lambda t},$$

其中 $M = \sup_{1 \leq i \leq n} M_i$, 由定义 1 知网络(1)是全局指数稳定的.

注:如果存在正数 $0 < \delta < 1$, 使 $I - \delta I - |A| e^{\delta \tau}$ 为 M 矩阵,等价地 $0 < 1 - \delta - \rho(|A|) e^{\delta \tau}$, 即 $\rho(|A|) < \frac{1-\delta}{e^{\delta \tau}}$, 由引理 2 的证明得知,网络(1)是全局指数稳定的,且收敛指数 $\lambda > \delta$.

推论 2 设 $|A| = (|a_{ij}|)_{n \times n}$, I 为单位矩阵, $W = I - |A| \in DD_0(\alpha) \cap K^{m \times m} (w_{ii} > 0)$ 是不可约矩阵,如果存在 $w_{st} \neq 0$, 使得 $(s, t) \in G^+(W) \neq \emptyset$, 那么网络(1)存在唯一的平衡点,并且是全局指数稳定的,其中 $DD_0(\alpha), K^{m \times m}, G^+(W)$ 见文献[8].

证明方法与定理 2 类似,在此省略.

参考文献:

- [1] Capalsmy K, He X Z. Stability in asymmetric Hopfield network with delays[J]. Physics D. 1994, 76(3):344-358.
- [2] Cao Y J, Wu Q H. A note on stability of analog neural network with delay[J]. IEEE Trans neural Networks, 1996, 7(4): 1533-1535.
- [3] 赵维锐. 具有滞后的 H 神经网络的稳定性[J]. 复旦大学学报(自然科学版), 1994, 33(2):214-218.
- [4] Zhang Y. Global exponential stability and periodic solution of Hopfield neural network with delay[J]. International Journal of System Science, 1996, 27(2):227-231.
- [5] Driver R D. Ordinary and delay differential equations[M]. New York: Springer-verlag, 1997. 389-390.
- [6] 廖晓昕. 稳定性的理论方法与应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 1996.
- [7] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in Mathematical Science[M]. New York: Academic, 1979.
- [8] Xiao Sheng-zhong. Global exponential stability analysis of wavelet neural networks[J]. INFORMATION, 2003, 6(4):409-416.

Global Exponential Stability Analysis of Wavelet Neural Network with Delays (II)

XIAO Sheng-zhong^{1,2}, ZHANG Xin-zheng²

(1. Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China;

2. Guangdong AIB College, Guangzhou 510507, China)

Abstract: The existence and uniqueness of equilibrium to DWNN are given with Brouwer fixed point theory and contraction mapping theory. By means of using the Halanay differential inequality with delay and the theory of bidirectional dominance matrices, the global exponential stability is studied, and a series of important results are obtained.

Key words: wavelet; neural network; delay; the global exponential stability

(上接第24页)

The Recovery of EDTA in Waste PCB Chemical-copper Solution

CHEN Shi-rong¹, ZHENG Wei-qiang¹, CHEN Zhi-chuan², LIAO Wei-feng²

(1. Faculty of Chemical Engineering and Light Industry, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China;

2. Shenzhen Hazardous Waste Treatment Station, Shenzhen 518049, China)

Abstract: In this paper copper is reduced by formaldehyde which is contained in the wastewater of chemical copper plating. The EDTA acid can be recycled after acidulation. Using EDTA, EDTA-Na₂ and new chemical copper plating solution are prepared. It is shown that the removal rate of copper is 99.6%. The EDTA recovery is more than 98%, and the purity of EDTA-Na₂ which is made from EDTA is more than 98.5%. It can be used in industries of chemical copper plating again.

Key words: PCB; chemical-copper; EDTA; recovery